第４講　微分法，積分法②

1　２つの放物線 $y=x^2$ と $y=ax^2+bx+c$ とは２点で交わり，交点におけるこれら２つの放物線の接線は互いに直交するという．a，b，c が変化するとき，このような放物線 $y=ax^2+bx+c$ の頂点の全体はどのような集合をつくるか調べ，その集合を図示せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　a を正の実数とし，$f(x)=2x^3-3a(a+1)x^2+6a^3x$ に対して $g(a)=\dfrac{1}{a^3}\displaystyle\int_0^a|f'(x)|dx$ とする．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$g(a)$ を求めよ．

(2)　$g(a)$ の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　[1]　放物線 C：$y=ax^2$ $(a>0)$ を考える．放物線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ ap^2)$ $(p\neq 0)$ における C の接線と直交し，P を通る直線を l とする．直線 l と放物線 C とで囲まれる図形の面積を $S(p)$ とする．

(1)　直線 l の方程式を求めよ．

(2)　点 P を $p>0$ の範囲で動かす．$S(p)$ が最小となるときの，直線 l の傾き m と $S(p)$ を求めよ。

[2]　a，b を実数とする．xy 平面上で，直線 l：$y=ax+b$ は曲線 C：$y=(x+1)(2-x)$ と，x 座標が $0\leqq x\leqq 2$ を満たす点で接しているとする．

(1)　このときの点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求め，ab 平面上に図示せよ．

(2)　曲線 C および 3 つの直線 l，$x=0$，$x=2$ で囲まれた図形の面積を最小にする a，b の値と，このときの面積を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　微分法，積分法②

1　２つの放物線 $y=x^2$ と $y=ax^2+bx+c$ とは２点で交わり，交点におけるこれら２つの放物線の接線は互いに直交するという．a，b，c が変化するとき，このような放物線の頂点の全体はどのような集合をつくるか調べ，その集合を図示せよ．

$$\begin{cases} y=x^2 & \cdots\cdots① \\ y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0) & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，②より　$x^2=ax^2+bx+c$　整理して　$(a-1)x^2+bx+c=0$　……③

①，②が２点で交わるので　$a\neq 1$　かつ　$b^2-4(a-1)c>0$　……④

このとき，③の２解を α，β とおく $(\alpha<\beta)$ と，①で $y'=2x$，②で $y'=2ax+b$ である．

$x=\alpha$，β における①と②の接線が直交するので

$$\begin{cases} 2\alpha(2a\alpha+b)=-1 \\ 2\beta(2a\beta+b)=-1 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} 4a\alpha^2+2b\alpha+1=0 \\ 4a\beta^2+2b\beta+1=0 \end{cases}$$

よって，α，β は x についての２次方程式　$4ax^2+2bx+1=0$　……⑤　の２解である．

③と⑤を比較する．

$b=0$ のとき　$a-1:c=4a:1$　　$a-1=4ac$　　よって　$c=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4a}$

　④より　$-16ac^2>0$　　$c\neq 0$　より　$a<0$　（これは $a\neq 0$，1 を満たす）

　このとき　②は　$y=ax^2+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4a}$　　頂点 $\left(0,\ \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4a}\right)$，$\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4a}>\dfrac{1}{4}$

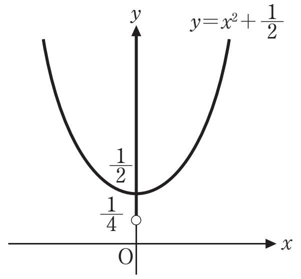
$b\neq 0$ のとき　③は　$2(a-1)x^2+2bx+2c=0$　これと⑤を係数比較して

$$\begin{cases} 4a=2(a-1) \\ 1=2c \end{cases} \quad \begin{cases} a=-1 \\ c=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$　これらは④および $a\neq 0$ を満たす．

このとき　②は　$y=-x^2+bx+\dfrac{1}{2}=-\left(x-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{1}{2}$

頂点の座標を (x, y) とおくと，$x=\dfrac{b}{2}$，$y=\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{1}{2}$　　よって　$y=x^2+\dfrac{1}{2}$　$(x\neq 0)$

以上より，求める集合は下図実線部分．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　a を正の実数とし，$f(x)=2x^3-3a(a+1)x^2+6a^3x$ に対して $g(a)=\dfrac{1}{a^3}\displaystyle\int_0^a |f'(x)|dx$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$g(a)$ を求めよ．

(2)　$g(a)$ の最小値を求めよ．

(1)　$f'(x)=6x^2-6a(a+1)x+6a^3=6(x-a^2)(x-a)$

$a \geqq 1$ のとき　$0<a\leqq a^2$

$$g(a)=\frac{1}{a^3}\int_0^a |f'(x)|dx=\frac{1}{a^3}\int_0^a f'(x)dx=\frac{1}{a^3}f(a)=\frac{1}{a^3}(3a^4-a^3)=3a-1$$

$0<a<1$ のとき　$0<a^2<a$

$$g(a)=\frac{1}{a^3}\left\{\int_0^{a^2} f'(x)dx-\int_{a^2}^a f'(x)dx\right\}=\frac{1}{a^3}\{f(a^2)-(f(a)-f(a^2))\}$$

$$=\frac{1}{a^3}\{2f(a^2)-f(a)\}=\frac{1}{a^3}\{2(-a^6+3a^5)-(3a^4-a^3)\}=-2a^3+6a^2-3a+1$$

よって　$\boldsymbol{g(a)=\begin{cases}-2a^3+6a^2-3a+1 & (0<a<1)\\ 3a-1 & (a\geqq 1)\end{cases}}$

(2)　$a\geqq 1$ のとき，$g(a)$ は単調増加

$0<a<1$ のとき

$g'(a)=-6a^2+12a-3=-3(2a^2-4a+1)$

$g'(a)=0$ となるのは，$a=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ のとき

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	(1)
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		↘	最小	↗	

よって　$a=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ のとき $g(a)$ は最小値をとる．

$g(a)=g'(a)\cdot\left(\dfrac{1}{3}a-\dfrac{1}{3}\right)+2a$ より，求める最小値は $g\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=2\cdot\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{2-\sqrt{2}}$

3　[1]　放物線 $C: y=ax^2 (a>0)$ を考える．放物線 C 上の点 $\mathrm{P}(p, ap^2)$ $(p\neq 0)$ における C の接線と直交し，P を通る直線を l とする．直線 l と放物線 C とで囲まれる図形の面積を $S(p)$ とする．

(1)　直線 l の方程式を求めよ．

(2)　点 P を $p>0$ の範囲で動かす．$S(p)$ が最小となるときの，直線 l の傾き m と $S(p)$ を求めよ。

(1)　$y=ax^2$　より　$y'=2ax$

$x=p$ における法線 l の方程式は $y=-\dfrac{1}{2ap}(x-p)+ap^2$　よって $\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{2ap}x+\dfrac{1}{2a}+ap^2}$

(2)　l と C の交点の x 座標は

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$ax^2=-\frac{1}{2ap}x+\frac{1}{2a}+ap^2$　より　$ax^2+\frac{1}{2ap}x-\frac{1}{2a}-ap^2=0$

$(x-p)\left(ax+\frac{1}{2ap}+ap\right)=0$　　$x=p,\ -\frac{1}{2a^2p}-p$

$\alpha=-\frac{1}{2a^2p}-p$ とおくと

$S(p)=\int_\alpha^p\left(-\frac{1}{2ap}x+\frac{1}{2a}+ap^2-ax^2\right)dx=\int_\alpha^p -a(x-p)(x-\alpha)dx$

$=\frac{a}{6}(p-\alpha)^3=\frac{a}{6}\left(2p+\frac{1}{2a^2p}\right)^3$

$p>0$ より　$2p+\frac{1}{2a^2p}\geqq 2\sqrt{2p\cdot\frac{1}{2a^2p}}=2\sqrt{\frac{1}{a^2}}=\frac{2}{a}$　($a>0$ より)

等号成立は　$2p=\frac{1}{2a^2p}$　つまり　$p=\frac{1}{2a}$　のとき

よって，求める最小値は $S\left(\frac{1}{2a}\right)=\frac{a}{6}\left(\frac{2}{a}\right)^3=\mathbf{\frac{4}{3a^2}}$

このときの l の傾きは　$m=-\frac{1}{2ap}=\mathbf{-1}$

3　[2]　a，b を実数とする．xy 平面上で，直線 $l:y=ax+b$ は曲線 $C:y=(x+1)(2-x)$ と，x 座標が $0\leqq x\leqq 2$ を満たす点で接しているとする．

(1)　このときの点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求め，ab 平面上に図示せよ．

(2)　曲線 C および 3 つの直線 l，$x=0$，$x=2$ で囲まれた図形の面積を最小にする a，b の値と，このときの面積を求めよ．

(1)　$y=(x+1)(2-x)=-x^2+x+2$　より　$y'=-2x+1$

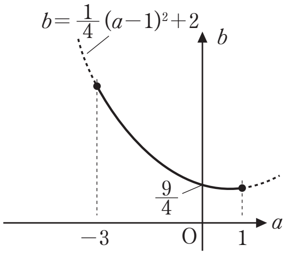
C と l の接点の x 座標を t $(0\leqq t\leqq 2)$ とすると

$-2t+1=a$　……①　　$-t^2+t+2=at+b$　……②

①より　$t=\frac{1-a}{2}$　　これを②に代入して　$\mathbf{b=\frac{1}{4}(a-1)^2+2}$

また，$0\leqq t\leqq 2$ より，$\mathbf{-3\leqq a\leqq 1}$

よって，(a, b) の存在範囲は右図実線部分．



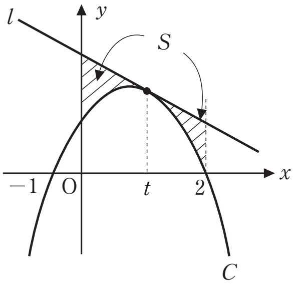
(2)　$S=\int_0^2(ax+b+x^2-x-2)dx$

$=\int_0^2(x-t)^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x\right]_0^2$

$=2t^2-4t+\frac{8}{3}=2(t-1)^2+\frac{2}{3}$ $(0\leqq t\leqq 2)$

ゆえに，S は $t=1$　つまり　$\mathbf{a=-1}$，$\mathbf{b=3}$ のとき

最小値 $\mathbf{\frac{2}{3}}$ をとる．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　$f(t)=\int_0^1 |x^2-2tx|dx$ とおく．$f(t)$ の最小値とそれを与える t の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　p を正の数とする．xy 平面において，次の条件(i)と(ii)を満たす直線 l が存在するような p の範囲を求めよ．

(1)　l の y 切片は p である．

(2)　放物線 $C : y = 3x^2$ と l で囲まれる図形の面積は 4 以下である．

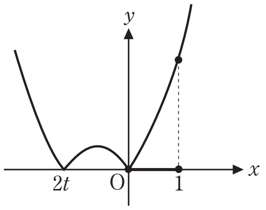
ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 $f(t)=\int_0^1 |x^2-2tx|dx$ とおく．$f(t)$ の最小値とそれを与える t の値を求めよ．

解答例

$t\leqq 0$ のとき

$$f(t)=\int_0^1 (x^2-2tx)dx=\left[\frac{x^3}{3}-tx^2\right]_0^1=-t+\frac{1}{3}$$

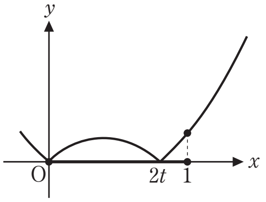


$0\leqq t\leqq \frac{1}{2}$ のとき

範囲によるインテグラルの分割！

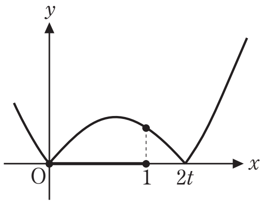
$$f(t)=\int_0^{2t}(-x^2+2tx)dx+\int_{2t}^1 (x^2-2tx)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+tx^2\right]_0^{2t}+\left[\frac{x^3}{3}-tx^2\right]_{2t}^1=\frac{8}{3}t^3-t+\frac{1}{3}$$



$t\geqq \frac{1}{2}$ のとき

$$f(t)=\int_0^1 (-x^2+2tx)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+tx^2\right]_0^1=t-\frac{1}{3}$$



$f(t)$ は $t\leqq 0$ において単調減少，$t\geqq \frac{1}{2}$ において単調増加する．

$0\leqq t\leqq \frac{1}{2}$ において　$f'(t)=8t^2-1$

$f'(t)=0$ となるのは　$t=\frac{\sqrt{2}}{4}$ のとき

t	0	…	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	…	$\frac{1}{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

以上より，求める最小値は　$f\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　p を正の数とする．xy 平面において，次の条件(i)と(ii)を満たす直線 l が存在するような p の範囲を求めよ．

(i)　l の y 切片は p である．

(ii)　放物線 $C: y=3x^2$ と l で囲まれる図形の面積は 4 以下である．

解答例

$l: y=mx+p$　……①　とおく．

これと，$C: y=3x^2$　……②　の交点の x 座標は

$mx+p=3x^2$　　$3x^2-mx-p=0$　……③　の異なる 2 解である．

これを α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，解と係数の関係より　$\alpha+\beta=\dfrac{m}{3}$，$\alpha\beta=-\dfrac{p}{3}$

①と②で囲まれる図形の面積を S とすると

$$S=\int_\alpha^\beta (mx+p-3x^2)dx$$

$$=-3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

2 グラフの交点の x 座標を使って因数分解！-3 は前に出した．

$$=-3\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

$S\leqq 4$ より　$\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\leqq 4$

$(\beta-\alpha)^3\leqq 8$

$\beta-\alpha>0$ より　$(\beta-\alpha)^2\leqq 4$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\leqq 4$

$\left(\dfrac{m}{3}\right)^2-4\left(-\dfrac{p}{3}\right)\leqq 4$

したがって　$m^2\leqq 36-12p$

これを満たす実数 m が存在するのは　$36-12p\geqq 0$　つまり　$p\leqq 3$ のとき．

（左辺）$\geqq 0$ である．よって右辺が 0 未満となるとき，これを満たす m が存在しない．

よって，求める p の範囲は　$\boldsymbol{0<p\leqq 3}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。